LUGAR GEOMÉTRICO

1. É reta x+3y+8=0 (mediatriz)
2. É uma circunferência de Centro C(2,0) e R = 5 que na forma normal é :
   $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$

CÔNICAS I: ELIPSE, HIPÉRBOLE e PARÁBOLA – GABARITO

ELIPSE.

1. Determine a equação da elipse em que:

a) os focos são F_1 (–2, 0) e F_2 (2, 0) e o comprimento do eixo maior é 6;

Solução. Os focos estão no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases}2c = 2-(-2) = 4 \Rightarrow c = 2\\ 2a = 6 \Rightarrow a = 3\end{cases} \rightarrow 3^2 = 2^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{9-4} \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

$$ii)\ Equação: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

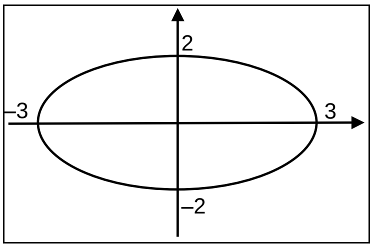
b) os vértices são A_1 (0, –6), A_2 (0, 6), B_1 (3, 0) e B_2 (–3, 0).

Solução. O eixo maior está localizado no eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases}2b = 3-(-3) = 6 \Rightarrow b = 3\\ 2a = 6-(-6) = 12 \Rightarrow a = 6\end{cases} \rightarrow c = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3.\sqrt{3} \rightarrow Focos: \begin{cases}\left(0, -3.\sqrt{3}\right)\\ \left(0, 3.\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

$$ii)\ Equação: \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{9} = 1$$

2. A elipse representada na figura tem equação:



a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ d) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

Solução. O eixo maior está localizado no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$\begin{cases}2a = 3-(-3) = 6 \Rightarrow a = 3\\ 2b = 2-(-2) = 4 \Rightarrow b = 2\end{cases} \rightarrow Equação: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

3. Determine os focos da elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Solução. O eixo maior está localizado no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases}a^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2\\ b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}\end{cases} \rightarrow c = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1 \rightarrow Focos: \begin{cases}(-1, 0)\\ (1, 0)\end{cases}$$

$$ii)\ Equação: \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{9} = 1$$

4. A excentricidade da elipse $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$ é:

a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ **b)** $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{7}{16}$

Solução. O eixo maior está localizado no eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases} a^2=16\Rightarrow a=\sqrt{16}=4 \\ b^2=7\Rightarrow b=\sqrt{7}\end{cases}\rightarrow c=\sqrt{4^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{16-7}=\sqrt{9}=3$$

$$ii)\ Excentricidade: \frac{c}{a}=\frac{3}{4}$$

5. O eixo maior da elipse $5x^2 + 2y^2 = 20$ mede:

a) 2 **b)** $2\sqrt{10}$ c) 4 d) 10 e) $\sqrt{10}$

Solução. Escrevendo a equação reduzida, temos:

$$i)\ 5x^2+2y^2=20\Rightarrow\frac{5x^2}{20}+\frac{2y^2}{20}=\frac{20}{20}\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{10}=1$$

$$ii)\ a^2=10\Rightarrow a=\sqrt{10}\rightarrow Eixo\ maior: 2a=2.\sqrt{10}$$

6. A equação da circunferência com centro na origem e raio igual ao semieixo menor da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ é:

a) $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ b) $x^2 + y^2 = 16$ c) $x^2 + y^2 = 4$ **d)** $x^2 + y^2 = 1$ e) $x^2 + y^2 = 2$

Solução. Escrevendo a equação reduzida da elipse, temos:

$$i)\ x^2+4y^2=4\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{4y^2}{4}=\frac{4}{4}\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

$$ii)\ b^2=1\Rightarrow b=1\rightarrow Eixo\ menor: b=1$$

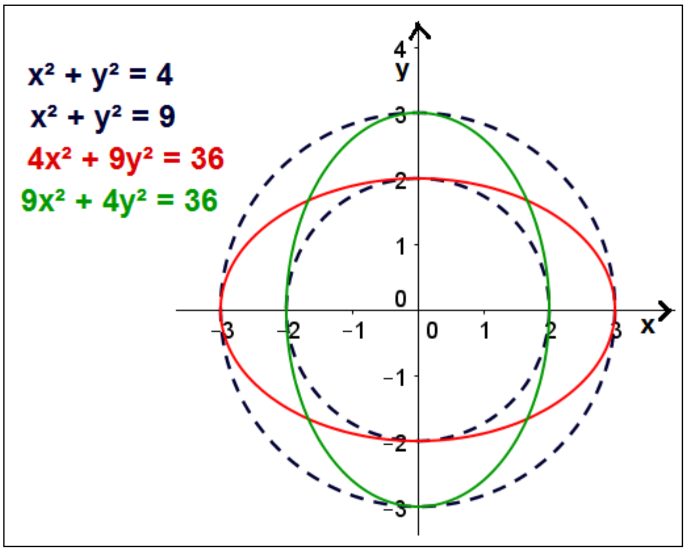
Escrevendo a equação da circunferência, temos: $x^2+y^2=1^2\Rightarrow x^2+y^2=1$.

7. Uma elipse está centrada na origem, tem os seus eixos sobre os eixos coordenados e é tangente simultaneamente a $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$. Na determinação desta elipse verifica-se que:

a) a solução é $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ b) não há solução c) a solução é $4x^2 + 9y^2 = 36$

d) a solução é $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ **e)** há mais de uma solução

Solução. O raio da circunferência menor mede 4 e o raio da maior mede 3. Tanto as circunferências, como a elipse estão centradas na origem. Para que a elipse seja tangente simultaneamente às duas circunferências, temos:



i) Eixo maior igual a 6 (sobre o eixo OX) e eixo menor igual a 2 (sobre o eixo OY):

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow 4x^2+9y^2=36$$

ii) Eixo maior igual a 6 (sobre o eixo OY) e eixo menor igual a 2 (sobre o eixo OX):

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow 9x^2+4y^2=36$$

8. Determine a equação da elipse em que:

a) os focos são F_1 (0, –3) e F_1 (0, 3) e o comprimento do eixo maior é 8;

Solução. Os focos estão no eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases} 2c=3-(-3)=6 \Rightarrow c=3 \\ 2a=8 \Rightarrow a=4 \end{cases} \rightarrow 4^2=3^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{16-9} \Rightarrow b=\sqrt{7}$$

$$ii)\ Equação: \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$$

b) os focos são F_1 (1, 0) e F_2 (–1, 0) e dois vértices são A_1 (2, 0), A_2 (–2, 0).

Solução. Os focos estão no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases} 2c=1-(-1)=2 \Rightarrow c=1 \\ 2a=2-(-2)=4 \Rightarrow a=2 \end{cases} \rightarrow 2^2=1^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{4-1} \Rightarrow b=\sqrt{3}$$

$$ii)\ Equação: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

9. As coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2 + 25y^2 = 225$ são:

a) $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ b) (2, 0) e (–2, 0) c) (0, 4) e (0, –4) **d)**(4, 0) e (–4, 0) e) (0, 2) e (0, –2)

Solução. Escrevendo a equação reduzida da elipse, temos:

$$i)\ 9x^2+25y^2=225 \Rightarrow \frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=\frac{225}{225} \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$$

$$ii)\ c^2=5^2-3^2 \Rightarrow c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4 \rightarrow Focos: \begin{cases} (-4,0) \\ (4,0) \end{cases}$$

HIPÉRBOLE.

1. Determine a equação da hipérbole tal que:

a) os focos são F_1 (–2, 0) e F_2 (2, 0) e dois vértices são A_1(–1, 0) e A_2(1, 0);

Solução. Os focos estão no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases} 2c=2-(-2)=4 \Rightarrow c=2 \\ 2a=1-(-1)=1 \Rightarrow a=1 \end{cases} \rightarrow 2^2=1^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{4-1} \Rightarrow b=\sqrt{3}$$

$$ii)\ Equação: x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

b) os vértices do eixo real são A_1 (0, –6) e A_2 (0, 6) e os vértices do eixo imaginário são B_1 (4, 0) e B_2 (–4, 0).

Solução. Os focos estão no eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases} 2b=4-(-4)=8 \Rightarrow b=4 \\ 2a=6-(-6)=12 \Rightarrow a=6 \end{cases} \rightarrow c^2=4^2+6^2 \Rightarrow c=\sqrt{16+36} \Rightarrow c=\sqrt{52}$$

$$ii)\ Equação: \frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{16}=1$$

2. A distância focal da hipérbole de equação $x^2 – 3y^2 = 3$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 **d)** 4 e) 5

Solução. Escrevendo a equação reduzida da hipérbole, temos:

$$x^2-3y^2=3\Rightarrow\frac{x^2}{3}-\frac{3y^2}{3}=\frac{3}{3}\Rightarrow\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1\to\begin{cases}a=\sqrt{3}\\b=1\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^1}=2\to 2c=4$$

3. A excentricidade da hipérbole $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ é:

a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{14}{4}$

Solução. Os focos estão localizados no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$i)\begin{cases}a^2=4\Rightarrow a=\sqrt{4}=2\\b^2=12\Rightarrow b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\end{cases}\to c=\sqrt{2^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

$$ii)\ Excentricidade:\frac{c}{a}=\frac{4}{2}=2$$

4. As assíntotas da hipérbole $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$ têm equações:

a) $y=\pm\frac{5}{2}x$ b) $y=\pm\frac{2}{5}x$ c) $y=\pm\frac{4}{25}x$ d) $y=\pm\frac{25}{4}x$ e) $y=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}x$

Solução. Os focos estão localizados no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$\begin{cases}a^2=4\Rightarrow a=\sqrt{4}=2\\b^2=25\Rightarrow b=\sqrt{25}=b=5\end{cases}\to Assíntotas: y=\pm\frac{b}{a}x\Rightarrow y=\pm\frac{5}{2}x$$

5. Determine os focos da hipérbole $4y^2-9x^2=36$.

Solução. Escrevendo a equação reduzida da hipérbole, temos:

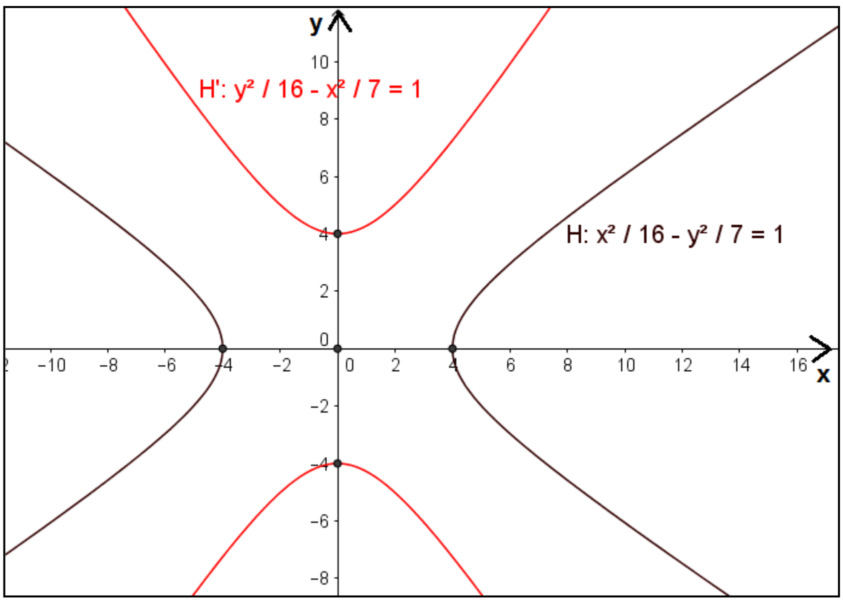
$$i)\ 4y^2-9x^2=36\Rightarrow\frac{4y^2}{36}-\frac{9x^2}{36}=\frac{36}{36}\Rightarrow\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1\to\begin{cases}a=\sqrt{9}=3\\b=\sqrt{4}=2\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{(3)^2+2^1}=\sqrt{13}$$

$$ii)\ Focos:\begin{cases}\left(0,-\sqrt{13}\right)\\\left(0,\sqrt{13}\right)\end{cases}$$

6. Considere a hipérbole H de equação $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{16}=1$. Determine a equação da hipérbole cujo eixo real coincide com o eixo imaginário de H e cujo eixo imaginário coincide com o eixo real de H.

Solução. Considerando 2a e 2b, respectivamente os eixos reais e imaginários de H e 2a' e 2b', respectivamente os eixos reais e imaginários de H', temos que a = b' e b = a':

$$i)\ H:\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{16}=1\to\begin{cases}a=\sqrt{7}\\b=\sqrt{16}=4\end{cases};\quad ii)\begin{cases}a'=4\\b'=\sqrt{7}\end{cases}\to Hipérbole\ H':\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{7}=1$$



7. Determine a equação da hipérbole equilátera cujos vértices do eixo real são A_1 (0, 4) e A_2 (0, –4) e cujo eixo imaginário fica sobre o eixo das abscissas.

Solução. Os focos estão localizados no eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$\begin{cases} 2a = 4-(-4) = 8 \Rightarrow a = 4 \\ b = a = 4\ (equilátera) \end{cases} \rightarrow Hipérbole: \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

8. Determine a equação da hipérbole tal que os vértices do eixo real são A_1 (–2, 0) e A_2 (2, 0) e a hipérbole é equilátera.

Solução. Os focos estão localizados no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$\begin{cases} 2a = 2-(-2) = 4 \Rightarrow a = 2 \\ b = a = 2\ (equilátera) \end{cases} \rightarrow Hipérbole: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

PARÁBOLA.

1. Determine a diretriz da parábola de equação $y^2 = -4x$.

Solução. A parábola possui concavidade para a esquerda e a diretriz é uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$i) \begin{cases} y^2 = -4x \\ y^2 = -2px \end{cases} \Rightarrow -2p = -4 \Rightarrow p = 2;\quad ii)\ Diretriz: x = \frac{p}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1.$$

2. O foco da parábola de equação $y^2 = 12x$ é:

a) F (0, 3) b) F (–3, 0) c) F (6, 0) **d)** F (3, 0) e) F (–6, 0)

Solução. A parábola possui concavidade para a direita e o foco está sobre o eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$i) \begin{cases} y^2 = 12x \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow 2p = 12 \Rightarrow p = 6;\quad ii)\ Foco: \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (3,0).$$

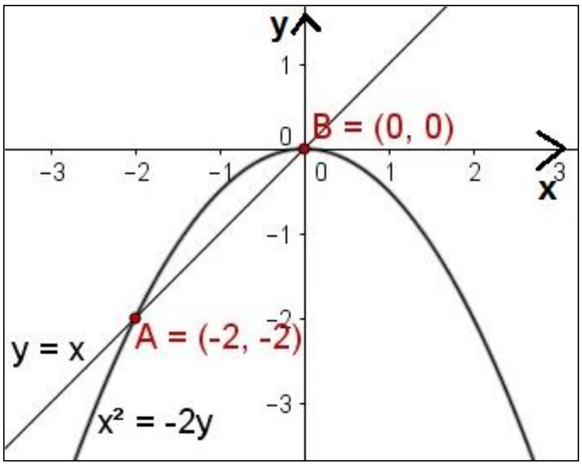
3. Determine os pontos de interseção da parábola $x^2 = -2y$ com a reta $y = x$.

Solução. Realizando as substituições e resolvendo o sistema, temos:

$$i) \begin{cases} x^2 = -2y \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = -2x \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}.$$

$$ii)\ Pontos: \begin{cases} (0,0) \\ (-2,-2) \end{cases}$$



4. A equação da parábola com vértice na origem e foco no ponto F $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ é:

a) $x^2 = y$ **b)** $y^2 = x$ c) $x^2 = 4y$ d) $y^2 = 4x$ e) $4y^2 = x$

Solução. O foco está no eixo das abscissas. Identificando os termos, temos:

$i)\ \frac{p}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow p=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $ii)\ Equação: y^2=2px\Rightarrow y^2=2.\left(\frac{1}{2}\right).x\Rightarrow y^2=x$.

5. A equação da parábola de vértice V (0, 0) e diretriz x = 2 é:

a) $y^2 = -8x$ b) $x^2 = -8y$ c) $x^2 = 8y$ d) $y^2 = 8x$ e) $y^2 = -2x$

Solução. O foco está no eixo negativo das abscissas. A parábola possui concavidade à esquerda.

$i)\ Diretriz: \begin{cases} x=\frac{p}{2} \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{2}=2\Rightarrow p=4$; $ii)\ Equação: y^2=-2px\Rightarrow y^2=-2.(4).x\Rightarrow y^2=-8x$.

6. A parábola com vértice na origem e foco F $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ tem equação:

a) $y^2 = -2x$ b) $x^2 = -2y$ c) $x^2 = 2y$ d) $y^2 = 2x$ e) $y^2 = 4x$

Solução. O foco está no eixo positivo das ordenadas. A parábola possui concavidade para cima.

$i)\ Foco: \left(0,\frac{p}{2}\right)\Rightarrow \frac{p}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow p=1$; $ii)\ Equação: x^2=2py\Rightarrow x^2=2.(1).y\Rightarrow x^2=2y$.

7. Determine a equação da parábola com vértice na origem, simétrica em relação ao eixo X e que passa pelo ponto P (–2, 1).

Solução. O eixo de simetria é o das abscissas. Logo, a parábola possui concavidade para a direita, pois o ponto P possui abscissa negativa e ordenada positiva. Identificando os termos, temos:

$$i)\ \begin{cases} y^2=-2px \\ P(-2,1)\in Parábola: \end{cases} \Rightarrow (1)^2=-2.p.(-2)\Rightarrow 1=4p\Rightarrow p=\frac{1}{4};$$

$$ii)\ Equação: y^2=-2\left(\frac{1}{4}\right)x\Rightarrow y^2=-\frac{x}{2}.$$

8. Determine as tangentes à parábola $y^2 = 2x$ que passam pelo ponto P_1 (–1, 0).

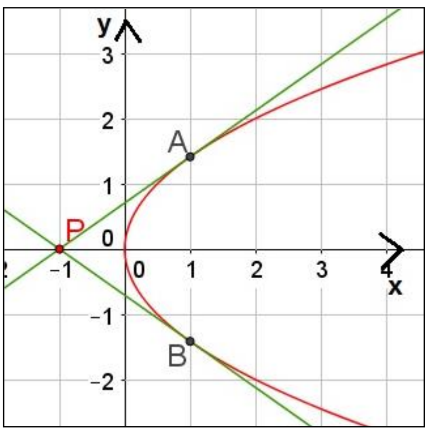
Solução. O eixo de simetria é o das abscissas. Há duas soluções possíveis.

$$i)\ \begin{cases} reta: y=mx+n \\ P_1(1,0)\in reta: \end{cases} \Rightarrow 0=m.(-1)+n\Rightarrow n=m\rightarrow reta: y=mx+m$$

$$ii)\ \begin{cases} y^2=2x \\ y=mx+m \end{cases} \Rightarrow (mx+m)^2=2x\Rightarrow m^2x^2+2m^2x+m^2=2x\Rightarrow m^2x^2+(2m^2-2)x+m^2=0$$

$$iii)\ Tangente: \Delta=0\Rightarrow (2m^2-2)^2-4.(m^2).(m^2)=0\Rightarrow 4m^4-8m^2+4-4m^4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8m^2+4=0\Rightarrow m^2=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} m_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow 1^a\ \tan gente: y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow 1^a\ \tan gente: y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



9. Determine a tangente à parábola $y^2 = 4x$ no ponto (1, 2).

Solução. O eixo de simetria é o das abscissas. O ponto (1, 2) pertence à reta e à parábola.

$$i)\begin{cases} reta: y = mx + n \\ P(1, 2) \in reta: \end{cases} \Rightarrow 2 = m.(1) + n \Rightarrow n = 2 - m \rightarrow reta: y = mx + 2 - m$$

$$ii)\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = mx + 2 - m \end{cases} \Rightarrow (mx + 2 - m)^2 = 4x \Rightarrow m^2x^2 + (4m - 2m^2)x + m^2 - 4m + 4 = 4x \Rightarrow$$

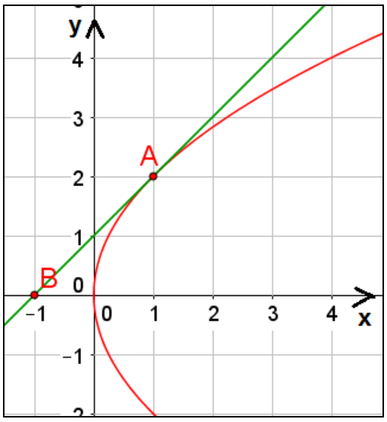
$$\Rightarrow m^2x^2 + (4m - 2m^2)x - 4x + m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m^2x^2 + (4m - 2m^2 - 4)x + m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$iii)\ Tangente: \Delta = 0 \Rightarrow (4m - 2m^2 - 4)^2 - 4.(m^2).(m^2 - 4m + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16m^2 + 4m^4 + 16 - 16m^3 - 32m + 16m^2 - 4m^4 + 16m^3 - 16m^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 32m + 16 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow y = 1.(x) + 2 - 1 \Rightarrow y = x + 1 \rightarrow reta$$



10. Determine o ângulo formado com o eixo Ox pela reta que passa pelo centro da circunferência de equação $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 5 = 0$ e pelo foco da parábola $x^2 = 8y$.

Solução. Identificando os elementos, temos.

$$i)\ Circunferência: 2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{2} \rightarrow Centro: (-1, -1)$$

$$ii)\ Parábola: \begin{cases} x^2 = 8y \\ x^2 = 2py \end{cases} \Rightarrow 2p = 8 \Rightarrow p = 4 \rightarrow Foco: (0, 2)$$

$$iii)\ reta: m = \frac{-1-2}{-1-0} = 3 \rightarrow \begin{cases} y = 3x + n \\ (0, 2) \in reta \end{cases} \Rightarrow 2 = 3.(0) + n \Rightarrow n = 2 \rightarrow reta: y = 3x + 2$$

$$iv)\ tg\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = arctg\ 3 \cong 71{,}57°$$